MOTI ROTATORI

Esercizi svolti dal prof. Trivia Gianluigi - scritti con Lyx.

Variabili rotazionali

Esercizio 1. Un buon lanciatore di baseball può lanciare una palla verso casa base a $85\,{}^{\mathrm{km}}/_{\mathrm{h}}$ con una rotazione di 1800 giri/min. Quante rivoluzioni fa la palla da baseball nel suo percorso verso casa base? Per semplicità, supponiamo che il percorso di $60\,m$ sia rettilineo.

Soluzione. Un corpo che viaggia a $85\,{}^{\mathrm{km}}/_{\mathrm{h}} = 24\,{}^{\mathrm{m}}/_{\mathrm{s}}$, pertanto la palla percorre $60\,m$ in

$$t = \frac{s}{v} = \frac{60\,m}{24\,\frac{m}{s}} = 2,5\,s$$

Se la palla compie 1800 giri ogni minuto, ne compie 75 in $2,5\,s$.

Esercizio 2. Un tuffatore compie $2,5$ rivoluzioni nel percorso da una piattaforma alta $10\,m$ all'acqua. Supponendo che la velocità verticale iniziale sia zero, trova la velocità angolare media durante il tuffo.

Per percorrere $10\,m$ il tuffatore impiega $1,4\,s$, per cui compie in media una rivoluzione in $0,56\,s$. In una rivoluzione il tuffatore ruota di 2π radianti per cui, la velocità angolare media

$$\omega = \frac{2\pi}{0,56} = 11\,\frac{rad}{s}$$

Esercizio 3. La ruota in figura ha otto raggi equidistanti lunghi 30 cm. È montata su un asse fisso e ruota a $2,5$ giri/s. Si vuole scoccare una freccia lunga 20 cm parallela a questo asse in modo che attraversi la ruota senza colpire nessuno dei raggi. Supponiamo che la freccia e i raggi siano molto sottili. Quale velocità minima deve avere la freccia?

I raggi hanno in prima approssimazione una larghezza trascurabile anche se non nulla, per cui sono come le diagonali di un ottagono inscritto. Il cerchio della ruota è quindi diviso in otto settori di ampiezza $\frac{2\pi}{8} = \frac{\pi}{4} = 45°$. La circonferenza della ruota è $2\pi r = 188\,cm$. Ogni arco è quindi $24\,cm$. La ruota compie un intero giro in

$$T = \frac{1}{f} = 0,4\,s$$

e il tempo del passaggio da un settore a un altro è di $0,4 : 8 = 0,05\,s$. La freccia dovrà quindi attraversare il settore in questo tempo, per cui

$$v = \frac{s}{t} = \frac{20\,cm}{0,05\,s} = 400\,\frac{cm}{s} = 4,0\,\frac{m}{s}$$

Esercizio 4. Un tamburo ruota attorno al proprio asse centrale con una velocità angolare di $12,60\,{}^{\mathrm{rad}}/_{\mathrm{s}}$. Se il tamburo poi rallenta a una tasso costante di $4,20\,{}^{\mathrm{rad}}/_{\mathrm{s}^2}$, quanto tempo impiega e di quale angolo ruota per fermarsi?

Soluzione. Il problema ci propone la velocità angolare iniziale di $12,60\,\mathrm{rad/s}$ e la decelerazione costante di $4,20\,\mathrm{rad/s^2}$, e dovendo essere la velocità finale nulla, avremo da

$$\omega = \omega_0 + \alpha t$$

$$0 = 12,60 - 4,20t$$

da cui

$$t = \frac{12,60\,\frac{rad}{s}}{4,20\,\frac{rad}{s^2}} = 3,00\,s$$

e l'angolo sarà

$$\Delta\theta = \omega t + \frac{1}{2}\alpha t^2 = 0 + 2,10 \cdot 9,00 = 18,9\,rad$$

Esercizio 5. Un volano compie 40 giri mentre rallenta da una velocità angolare di $1,5$ rad/s fino a fermarsi. (a) Assumendo un'accelerazione angolare costante, trovare il tempo necessario affinché si fermi. (b) Qual è la sua accelerazione angolare? (c) Quanto tempo gli occorre per completare le prime 20 delle 40 rivoluzioni?

Soluzione. Se il volano ha al tempo $t = 0$ una velocità angolare di $1,5\,\mathrm{rad/s} = \frac{1,5}{2\pi} = 0,239\,\mathrm{giri/s}$

$$\Delta\theta = \frac{\omega_0 + \omega_f}{2}t$$

$$t = \frac{80\,giri}{0,239\,\frac{giri}{s}} = 335\,s$$

l'accelerazione angolare si ricava da (con $\omega_f = 0$)

$$\theta = \omega_f t - \frac{1}{2}\alpha t^2$$

$$\alpha = \frac{2\theta}{t^2} = -\frac{2 \times 40\,giri}{335^2\,s^2} = -7,13 \cdot 10^{-4}\,\frac{giri}{s^2} = -7,13 \cdot 10^{-4} \times 2\pi\,\frac{rad}{s^2} = -4,5 \cdot 10^{-3}\,\frac{rad}{s^2}$$

Per determinare il tempo dei primi 20 giri avremo da

$$\theta = \omega_0 t + \tfrac{1}{2}\alpha t^2 \quad \alpha t^2 + 2\omega_o t - 2\theta = 0$$

e ricavando t con la formula ridotta delle equazioni di 2° grado

$$t = \frac{-\omega_0 \pm \sqrt{\omega_0^2 + 2\alpha\theta}}{\alpha} = \frac{\left(-0,239\,\frac{giri}{s}\right) \pm \sqrt{\left(-0,239\,\frac{giri}{s}\right)^2 + 2\,(20\,giri)\left(-7,13 \cdot 10^{-4}\,\frac{giri}{s^2}\right)}}{-7,13 \cdot 10^{-4}\,\frac{giri}{s^2}}$$

$$t = \frac{-0,239 \pm 0,169}{-7,13 \cdot 10^{-4}} = \begin{array}{l} \nearrow\ 572\,s \\ \searrow\ 98\,s \end{array}$$

Poiché il tempo calcolato per l'arresto del volano è di $335\,s$, la soluzione accettabile deve essere inferiore a tale valore, cioè $98\,s$.

Esercizio 6. Partendo da ferma, una ruota ha un'accelerazione costante $\alpha = 3,0\,\mathrm{rad/s^2}$. Durante un certo intervallo di $4,0\,s$, ruota di $120\,rad$. Quanto tempo è stato necessario per raggiungere l'intervallo di $4,0\,s$?

Soluzione. Poiché la ruota parte da ferma, il suo spostamento angolare in funzione del tempo è dato da

$$\theta = \frac{1}{2}\alpha t^2$$

Assumiamo come estremi dell'intervallo i tempi t_1, iniziale, e $t_2 = t_1 + 4,0\,s$ quello finale. Gli spostamenti angolari corrispondenti in questi tempi sono

$$\theta_1 = \tfrac{1}{2}\alpha t_1^2 \quad \theta_2 = \tfrac{1}{2}\alpha t_2^2$$

Sia $\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1$, possiamo trovare t_1, che indica per quanto tempo la ruota è stata in movimento fino all'inizio dell'intervallo dato. Le espressioni di cui sopra possono essere combinate per dare. Allora

$$\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1 = \frac{1}{2}\alpha\left(t_2^2 - t_1^2\right) = \frac{1}{2}\alpha\left(t_2 + t_1\right)\left(t_2 - t_1\right)$$

Sostituendo i valori assegnati, si ha

$$t_2 + t_1 = \frac{2\Delta\theta}{\alpha\left(t_2 - t_1\right)} = \frac{2 \times 120\,rad}{3,0\,\frac{rad}{s^2} \times 4,0\,s} = 20\,s$$

Ora, $t_2 + t_1 = 20\,s$ e $t_2 = t_1 + 4,0\,s$; pertanto $t_1 = 8,0\,s$.

Esercizio 7. A $t = 0$, un volano ha una velocità angolare di $4,7\,\mathrm{rad/s}$, un'accelerazione angolare costante di $-0,25\,\mathrm{rad/s^2}$ e una linea di riferimento a $\theta_0 = 0$. (a) Di quale angolo massimo θ_{max} ruoterà la linea di riferimento? in senso positivo? Quali sono (b) il primo e (c) il secondo tempo in cui la linea di riferimento sarà in $\theta = \frac{1}{2}\theta_{max}$?

Soluzione. a) Troviamo θ_{max} con la condizione $\omega = 0$ (quando cioè la ruota inverte la rotazione dal verso positivo a quello negativo). Poiché la ruota parte da ferma, il suo spostamento angolare in funzione del tempo è dato da

$$\theta_{max} = -\frac{\omega_o^2}{2\alpha} = -\frac{\left(4,7\,\frac{rad}{s}\right)^2}{2 \times \left(-0,25\,\frac{rad}{s^2}\right)} = 44\,rad$$

b) Troviamo i valori per t_1 quando lo spostamento angolare (relativo al suo orientamento a $t = 0$) è $\theta_1 = 22\,rad$. Abbiamo

$$\theta_1 = \omega_0 t_1 + \tfrac{1}{2}\alpha t_1^2 \quad \alpha t_1^2 + 2\omega_o t_1 - 2\theta_1 = 0$$

$$t_1 = \frac{-\omega_0 \pm \sqrt{\omega_0^2 + 2\alpha\theta_1}}{\alpha} = \frac{-4,7 \pm \sqrt{4,7^2 + 2 \times (-0,25) \times 22}}{-0,25}\frac{-4,7 \pm 3.,3}{-0,25} \begin{matrix} \nearrow & 32\,s \\ \searrow & 5,6\,s \end{matrix}$$

Il primo riferimento sarà allora a $t_1 = 5,6\,s$, mentre il secondo a $t_2 = 32\,s$.

Esercizio 8. Quali sono le grandezze di (a) velocità angolare, (b) accelerazione radiale e (c) accelerazione tangenziale di un'astronave che compie un'orbita circolare di raggio $3220\,km$ ad una velocità di $29000\,\mathrm{km/h}$?

Soluzione. Si tratta di ricordare le relazioni che associano tra loro le grandezze lineari e angolari.
a) Avremo

$$\omega = \frac{v}{r} = \frac{29000\,\frac{km}{h}}{3220\,km} = \frac{8056\,\frac{m}{s}}{3,22\cdot 10^6\,m} = 2,50\cdot 10^{-3}\,\frac{rad}{s}$$

b) per l'accelerazione radiale

$$a_r = \frac{v^2}{r} = \omega^2 r = \frac{\left(8056\,\frac{m}{s}\right)^2}{3,22\cdot 10^6\,m} = 20,2\,\frac{m}{s^2}$$

c) per l'accelerazione tangenziale, poiché è soggetto alla sola forza centripeta

$$a_t = 0$$

Esercizio 9. Un volano del diametro di $1,20\,m$ ruota con una velocità angolare di 200 giri/min. (a) Qual è la velocità angolare del volano in radianti al secondo? (b) Qual è la velocità lineare di un punto sul bordo del volano? (c) Quale accelerazione angolare costante (in giri per minuto quadrato) aumenterà la velocità angolare del volano fino a 1000 giri/min in $60,0\,s$? (d) Quanti giri compie la ruota in quei $60,0\,s$?

Soluzione. a) La velocità angolare è uguale a $\frac{200}{60}\,\frac{giri}{s} = 3,3\,\frac{giri}{s} = 3,33\times 2\pi = 20,9\,\frac{rad}{s}$.
b) Calcoliamo la lunghezza in metri di un giro:

$$l_{giro} = 2\pi r = 1,20\pi = 3,75\,m$$

la velocità lineare su un punto distante 1,20 dall'asse di rotazione è

$$v = \omega r = 3,3\,\frac{giri}{s}\times 3,75\,m = 12,5\,\frac{m}{s}$$

c) trasformiamo sempre la velocità in rad/s; da $\omega = \omega_0 + \alpha t$

$$\alpha = \frac{\omega-\omega_0}{t} = \frac{(1000-200)\,\frac{giri}{min}}{1,0\,min} = 800\,\frac{giri}{s^2}$$

d) da $\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha\Delta\theta$, si ha

$$\Delta\theta = \frac{\omega^2-\omega_0^2}{2\alpha} = \frac{(105^2-20,9^2)\,\frac{rad^2}{s^2}}{2\times 1,40\,\frac{rad}{s^2}} = 3780\,rad = 600\,giri$$

Esercizio 10. (a) Qual è la velocità angolare ω attorno all'asse polare di un punto sulla superficie terrestre a 40° di latitudine N? (La Terra ruota attorno a quell'asse.) (b) Qual è la velocità lineare v del punto? Cosa sono (c) ω e (d) v per un punto all'equatore?

Soluzione. La velocità lineare di un punto sulla superficie terrestre dipende dalla sua distanza dall'asse di rotazione. Per ricavare la velocità lineare, si ha $v = \omega r$, dove r è il raggio della sua orbita. Un punto sulla Terra a una latitudine di 40° si muove lungo una traiettoria circolare di raggio $r = R\cos 40°$, dove R è il raggio della Terra ($6,4\cdot 10^6\,m$). D'altra parte, all'equatore è $r = R$.

a) La Terra compie un giro in un giorno, cioè in $T = 24\,h \times 3600\,\frac{s}{h} = 8,64 \cdot 10^4\,s$, per cui

$$\omega = \frac{2\pi\,rad}{8,64 \cdot 10^4\,s} = 7,3 \cdot 10^5\,\frac{rad}{s}$$

b) alla latitudine assegnata, la velocità lineare è

$$v = \omega r = \omega R \cos 40° = 7,3 \cdot 10^{-5}\,\frac{rad}{s} \times 6,4 \cdot 10^6\,m \times \cos 40° = 358\,\frac{m}{s}$$

c) all'equatore la velocità angolare è la stessa, mentre la velocità lineare diviene

$$v = \omega r = \omega R \cos 0° = 7,3 \cdot 10^{-5}\,\frac{rad}{s} \times 6,4 \cdot 10^6\,m \times 1 = 467\,\frac{m}{s}$$

Se l'angolo diventa di 90° (ai poli), il $\cos 90° = 0$, per cui $v = 0$.

Esercizio 11. Un seme si trova su un piatto che ruota a $33\,\frac{1}{3}$ giri/min, a $6,0\,cm$ dall'asse di rotazione. Quali sono (a) l'accelerazione del seme e (b) il minimo coefficiente di attrito statico per evitare lo slittamento? (c) Se la piattaforma girevole avesse subito un'accelerazione angolare costante da ferma in $0,25\,s$, qual è il coefficiente minimo per evitare lo slittamento?

Soluzione. a) scriviamo la velocità angolare in giri al secondo: $\omega = \frac{33,3 \times 2\pi}{60} = 3,49\,\frac{rad}{s}$ e l'accelerazione centripeta è

$$a = \omega^2 r = \left(3,49\,\frac{rad}{s}\right)^2 \times 0,06\,m = 0,73\,\frac{m}{s^2}$$

b) si chiede di determinare il coefficiente di attrito affinché il seme non si sposti verso il centro. Analizzando le forze presenti, abbiamo la forza centripeta data dall'accelerazione a, e l'attrito determinato da $ma \le f_{max} = \mu g$, essendo il seme e il disco in piano, per cui

$$\mu = \frac{a}{g} = \frac{0,73}{9,81} = 7,44 \cdot 10^{-2}$$

c) ricordiamo le relazioni che determinano l'accelerazione come somma di una componente radiale, $\omega^2 r$ e una tangenziale, αr. Allora, il modulo dell'accelerazione è

$$|\overrightarrow{a}| = \sqrt{a_r^2 + a_t^2} = \sqrt{\omega^4 r^2 + \alpha^2 r^2} = r\sqrt{\omega^4 + \alpha^2}$$

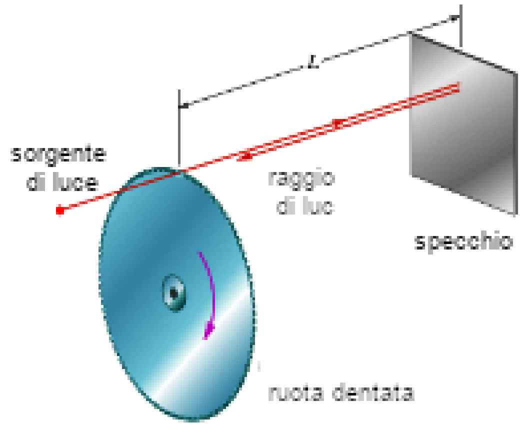
se ancora l'oggetto non deve slittare si deve avere

$$f_{max} = \mu m g = m a_{max} = m r \sqrt{\omega_{max}^4 + \alpha^2}$$

ma $\alpha = \frac{\omega}{t}$, per cui

$$\mu = \frac{r\sqrt{\omega_{max}^4 + \frac{\omega^2}{t^2}}}{g} = \frac{0,06\sqrt{3,49^4 + \frac{3,49^2}{0,25^2}}}{9,81} = 0,11$$

Esercizio 12. La figura mostra un primo metodo per misurare la velocità della luce che utilizza una ruota dentata rotante. Un raggio di luce passa attraverso una delle fessure sul bordo esterno della ruota, viaggia verso uno specchio distante e ritorna alla ruota giusto in tempo per passare attraverso la fessura successiva della ruota. La ruota dentata ha un raggio di $5,0\,cm$ e 500 scanalature attorno al bordo. Le misure effettuate quando lo specchio si trova a $L = 500\,m$ dalla ruota indica dà una velocità della luce di $3,0 \cdot 10^5\,{}^{km}/_{s}$. (a) Qual è la velocità angolare (costante) della ruota? (b) Qual è la velocità lineare di un punto sul bordo della ruota?



Soluzione. La ruota dentata ha un circonferenza di $2\pi\,rad$. Essendoci 500 scanalature, ogni spazio vale $\frac{2\pi}{500} = 1.26 \cdot 10^{-2}\,rad$. La luce che passa attraverso uno spazio percorre, tra andata e ritorno, $1000\,m = 1\,km$, ritrovando uno spazio vuoto. La luce impiega per percorrere tale distanza, un tempo

$$t = \frac{s}{v} = \frac{1\,km}{3,0 \cdot 10^5\,\frac{km}{s}} = 3,3 \cdot 10^{-6}\,s$$

avremo quindi

$$\omega = \frac{\theta}{t} = \frac{1,26 \cdot 10^{-2}\,rad}{3,34 \cdot 10^{-6}\,s} = 3,8 \cdot 10^3\,\frac{rad}{s}$$

la velocità lineare è

$$v = \omega r = 3,8 \cdot 10^3\,\frac{rad}{s} \times 5,0 \cdot 10^{-2}\,m = 1,9 \cdot 10^2\,\frac{m}{s}$$

Esercizio 13. Un disco, di raggio $0,25\,m$, deve essere fatto ruotare come una giostra di $800\,rad$, partendo da fermo, guadagnando velocità angolare al ritmo costante α_1 per i primi $400\,rad$ e poi perdendo velocità angolare al ritmo costante $-\alpha_1$ finché non è di nuovo a riposo. L'accelerazione centripeta di qualsiasi porzione del disco non deve superare i $400\,{}^{m}/_{s^2}$. (a) Qual è il tempo minimo richiesto per la rotazione? (b) Qual è il valore corrispondente di α_1?

Soluzione. Il limite superiore per l'accelerazione centripeta (uguale all'accelerazione radiale) pone un limite superiore della velocità di rotazione (la velocità angolare ω) considerando un punto sul bordo. Pertanto,

$$\omega_{max} = \sqrt{\frac{\alpha}{r}} = \sqrt{\frac{400\,\frac{m}{s^2}}{0,25\,m}} = 40\,\frac{rad}{s}$$

Applichiamo alla prima metà del movimento (con $\omega_0 = 0$) la formula

$$\theta = \frac{1}{2}\left(\omega_0 + \alpha\right)t$$

cioè

$$400\,rad = \frac{1}{2} \times 40\,\frac{rad}{s}t$$
$$t = \frac{800\,rad}{40\,\frac{rad}{s}} = 20\,s$$

La seconda metà del moto è simmetrica alla prima, per cui il tempo totale per l'accelerazione e la successiva decelerazione è di $40\,s$.

Per trovare l'accelerazione basta analizzare la prima metà del moto.

$$\omega = \omega_0 + \alpha t \quad \alpha = \frac{\omega - \omega_0}{t} = \frac{40\,\frac{rad}{s} - 0}{20\,s} = 2,0\,\frac{rad}{s^2}$$

Esercizio 14. Calcola il momento d'inerzia di un volano che ha un'energia cinetica di $24000\,J$ quando ruota a $602\,{}^{\text{giri}}/_{\text{min}}$.

Soluzione. Dalla relazione $K = \frac{1}{2}m\omega^2 r^2$, possiamo ottenere il momento d'inerzia del volano

$$mr^2 = I = \frac{2K}{\omega^2} = \frac{48000\,J}{\left(\frac{602}{60} \cdot 2\pi\,s^{-1}\right)^2} = 12,1\,kg \cdot m^2$$

Esercizio 15. Due cilindri solidi uniformi, ciascuno rotante attorno al proprio asse centrale (longitudinale) a $235\,{}^{\text{rad}}/_{\text{s}}$, hanno la stessa massa di $1,25\,kg$ ma differiscono nel raggio. Qual è l'energia cinetica di rotazione (a) del cilindro più piccolo, di raggio $0,25\,m$ e (b) del cilindro più grande, di raggio $0,75\,m$?

Soluzione. Il momento d'inerzia di un tale solido è dato da $I = \frac{1}{2}mr^2$. La velocità angolare è la stessa per entrambi, cioè $\omega = 235\,\frac{rad}{s}$. Avremo

$$I_a = \frac{1}{2} \times 1,25\,kg \times (0,25\,m)^2 = 0,039\,kg \cdot m^2$$

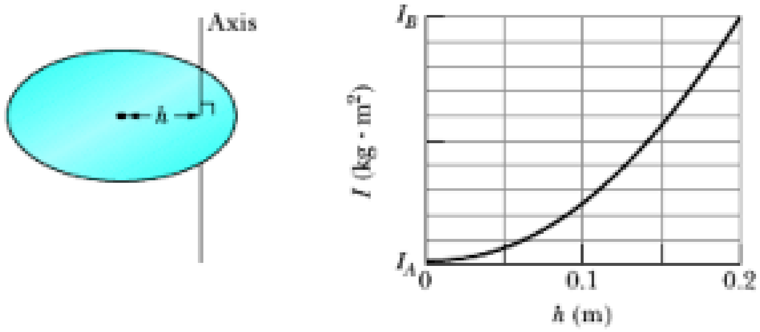
$$I_b = \frac{1}{2} \times 1,25\,kg \times (0,75\,m)^2 = 0,35\,kg \cdot m^2$$

L'energia cinetica sarà

$$K_a = \frac{1}{2}I_a\omega^2 = \frac{1}{2} \times 0,039 \times 235^2 = 1,1 \cdot 10^3\,J$$

$$K_b = \frac{1}{2}I_b\omega^2 = \frac{1}{2} \times 0,35 \times 235^2 = 9,7 \cdot 10^3\,J$$

Esercizio 16. La figura (a) mostra un disco che può ruotare attorno ad un asse situato a una distanza radiale h dal centro del disco. La figura (b) fornisce il momento d'inerzia I del disco attorno all'asse in funzione della distanza h, dal centro al bordo del disco. La scala sull'asse I è fissata da $I_{A_0} = 0,050\,kg \cdot m^2$ e $I_B = 0,150\,kg \cdot m^2$. Qual è la massa del disco?



(a) (b)

Soluzione. La scala relativa all'asse x indica che il raggio del disco è uguale a $0,2\,m$. Sappiamo che il momento di inerzia quando $h = 0$, cioè con l'asse nel centro del disco, è uguale a Mr^2. Se si considera poi un asse passante per un punto interno al disco ma parallelo a quello passante per l'asse centrale, il momento d'inerzia diventa $I_{max} - I_0 = mh_0 + mh^2_{max}$. Ma $h_0 = 0$,per cui avremo

$$I_{max} - I_0 = mh^2_{max}$$

da cui

$$m = \frac{I_{max} - I_o}{h^2_{max}} = \frac{0,10\,kg \cdot m^2}{(0,2\,m)^2} = 2,5\,kg$$

Esercizio. Calcolare il momento d'inerzia di un asta lunga un metro, con massa $0,56\,kg$, attorno ad un asse perpendicolare all'asta e situato in corrispondenza della tacca di $20\,cm$. (L'asta è intesa come sottile.)

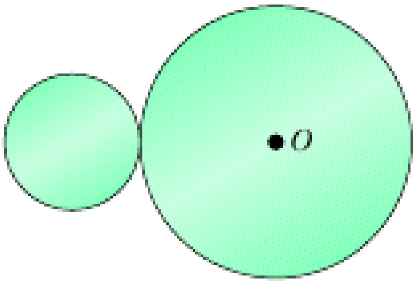
Soluzione. Sappiamo che $I = I_0 + Mh^2$, dove $I_o = \frac{1}{12}ML^2$ è il momento d'inerzia calcolato attorno al centro di massa, M è la massa e h è la distanza tra il centro di massa e l'asse di rotazione scelto. Il centro di massa è al centro dell'asta lunga $1\,m$, per cui

$$h = 0,50\,m - 0,20\,m = 0,30\,m$$

Noi troviamo

$$I = \frac{1}{12} \times 0,56\,kg \times (1,0\,m)^2 + 0,56\,kg \times (0,30\,m)^2 = 9,71 \cdot 10^{-2}\,kg \cdot m^2$$

Esercizio 17. Nella figura, un piccolo disco di raggio $r = 2,00\,cm$ è stato incollato al bordo di un disco più grande di raggio $R = 4,00\,cm$ in modo che i dischi giacciano sullo stesso piano. I dischi possono essere ruotati attorno ad una perpendicolare asse passante per il punto O al centro della figura del disco più grande. Entrambi hanno una densità uniforme di $1,40 \cdot 10^3\,{}^{kg}/_{m^3}$ e uno spessore uniforme di $5,00\,mm$. Trovare il momento d'inerzia del gruppo a due dischi attorno all'asse di rotazione passante per O.



Soluzione. L'insieme dei due dischi deve essere considerato come un solido. Ogni disco ha un volume dato da $A_b h = \pi r^2 h$ (disco piccolo) o $\pi R^2 h$ (disco grande), dove h è lo spessore uguale dei due dischi. Conoscendo la densità di entrambi possiamo ricavare la loro massa, ricordando la relazione $massa = densità \cdot Volume$, dove d è la densità comune

$$m = 1,40 \cdot 10^3 \,{}^{\mathrm{kg}}/_{\mathrm{m}^3} \times \pi \times \left(2,00 \cdot 10^{-2}\,m\right)^2 \times 5,00 \times 10^{-3}\,m = 8,80 \cdot 10^{-3}\,kg$$
$$M = 1,40 \cdot 10^3 \,{}^{\mathrm{kg}}/_{\mathrm{m}^3} \times \pi \times \left(4,00 \cdot 10^{-2}\,m\right)^2 \times 5,00 \times 10^{-3}\,m = 3,52 \cdot 10^{-2}\,kg$$

Il momento d'inerzia del gruppo sarà quindi:

$$I = \frac{1}{2}MR^2 + \frac{1}{2}mr^2 + m\left(r+R\right)^2$$

e sostituendo i valori dati e calcolati si ha

$$I = \tfrac{1}{2} \times 0,0352 \times (0,04)^2 + \tfrac{1}{2} \times 0,0088 \times (0,02)^2 + 0,0088 \times (0,06)^2 = 6,16 \cdot 10^{-5}\,kg\,m^2$$

Esercizio 18. I camion possono funzionare grazie all'energia immagazzinata in un volano rotante, con un motore elettrico che porta il volano alla velocità massima di$200\pi\,{}^{\mathrm{rad}}/_{\mathrm{s}}$. Supponiamo che uno di questi volani sia un cilindro solido e uniforme con una massa di $500\,kg$ e un raggio di $1,0\,m$. (a) Qual è l'energia cinetica del volano dopo la ricarica? (b) Se il camion utilizza una potenza media di $8,0\,kW$, per quanti minuti può funzionare tra una ricarica e l'altra?

Soluzione. L'energia cinetica del volano è data dalla relazione

$$K = I\omega^2$$

Per calcolare il momento d'inerzia, ricordiamo che esso è uguale a

$$I = \frac{1}{2}Mr^2 = \frac{1}{2} \times 500\,kg \times (1,0\,m)^2 = 250\,kg \cdot m^2$$

Pertanto

$$K = \frac{1}{2} \times 250\,kg \cdot m^2 \times \left(200\pi\,\frac{rad}{s}\right)^2 = 4,9 \cdot 10^7\,J$$

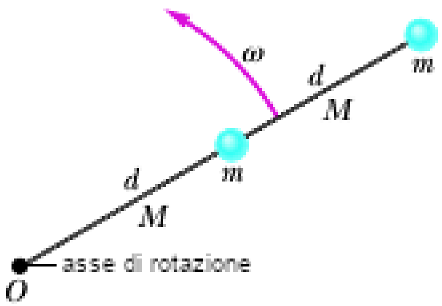
La potenza e l'energia cinetica sono legati dalla relazione

$$P = \frac{K}{t}$$

per cui

$$t = \frac{K}{P} = \frac{4,9 \cdot 10^7\,J}{8,0 \cdot 10^3\,\frac{J}{s}} = 6168\,s = 103\,min$$

Esercizio 19. Nella figura, due particelle, ciascuna con massa $m = 0,85 kg$, sono fissate tra loro, e a un asse di rotazione in O, da due sottili aste, ciascuna con lunghezza $d = 5,6\,cm$ e massa $M = 1,2\,kg$. La combinazione ruota attorno all'asse di rotazione con velocità angolare $\omega = 0,30\,{}^{rad}/_{s}$. Misurati intorno a O, quali sono il momento d'inerzia e l'energia cinetica della combinazione?



Soluzione. Le particelle sono considerate come "puntiformi". Indichiamo con I_1 il momento d'inerzia della prima asta più vicina all'asse di rotazione e con I_4 quello della particella più lontana. Avremo con I_2 il momento d'inerzia della prima particella, con I_3 il momento d'inerzia della seconda asta. Avremo

$$I = I_1 + I_2 + I_3 + I_4 = \left[\frac{1}{12}Md^2 + M\left(\frac{1}{2}d\right)^2\right] + md^2 + \left[\frac{1}{12}Md^2 + M\left(\frac{3}{2}d\right)^2\right] + m\,(2d)^2$$

e sostituendo i valori assegnati

$$I = \left[\tfrac{1,2\times5,6^2+3\times1,2\times5,6^2}{12}\right] + 0,85\times5,6^2 + \left[\tfrac{1,2\times5,6^2+27\times1,2\times5,6^2}{12}\right] + 4\times0,85\times5,6 =$$

$$= \frac{1,2\times5,6^2}{3} + 0,85\times5,6^2 + \frac{7\times1,2\times5,6^2}{3} + 4\times0,85\times5,6^2 = 230\,kg\cdot cm^2 = 0,023\,kg\cdot m^2$$

Calcoliamo ora l'energia cinetica dell'insieme aste e particelle

$$K = \frac{1}{2}\omega^2 = \left(\frac{4}{3}M + \frac{5}{2}m\right)d^2\omega^2 = \left(\frac{4\times1,2}{3} + \frac{5\times0,85}{2}\right)\times0,056^2\times0,30^2 = 1,1\cdot10^{-3}\,J$$

Esercizio 20. Durante il lancio da una tavola, la velocità angolare di un subacqueo attorno al suo centro di massa cambia da zero a 6,20 rad/s in 220 ms. Il suo momento d'inerzia attorno al suo centro di massa è $12,0\,kg\cdot m^2$. Durante il lancio, quali sono le grandezze della sua accelerazione angolare media e il momento della forza esterna media applicata su di essa dalla tavola?

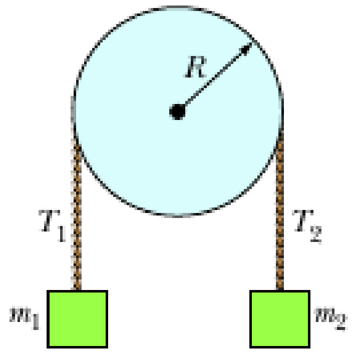
Soluzione. Calcoliamo l'accelerazione angolare

$$\alpha = \frac{\omega_f - \omega_i}{\Delta t} = \frac{6,20\,\frac{rad}{s}}{0,220\,s} = 28,2\,\frac{rad}{s^2}$$

Il momento attorno al centro di massa è dato dalla legge di Newton

$$\tau = I_{cdm}\alpha = 12,0\,kg\cdot m^2\times28,2\,\frac{rad}{s^2} = 338\,N\cdot m$$

Esercizio 21. Nella figura, il blocco 1 ha massa $m_1 = 460\,g$, il blocco 2 ha massa $m_2 = 500\,g$, e la puleggia, che è montata su un asse orizzontale con attrito trascurabile, ha raggio $R = 5,00\,cm$. Quando viene rilasciato da fermo, il blocco 2 cade di $75,0\,cm$ in $5,00\,s$ senza che la corda scivoli sulla puleggia. (a) Qual è il modulo dell'accelerazione dei blocchi? Cosa sono (b) la tensione T : e (c) la tensione T_1? (d) Qual è il modulo dell'accelerazione angolare della puleggia? (e) Qual è il suo momento d'inerzia?



Soluzione. Il blocco cade sotto l'azione della forza di gravità, per cui la sua accelerazione è (velocità iniziale nulla)

$$y = \frac{1}{2}at^2$$

da cui

$$a = \frac{2y}{t^2} = \frac{2 \times 0,75\,m}{5,00^2\,s^2} = 6,00 \cdot 10^{-2}\,\frac{m}{s^2}$$

il blocco 1 avrà la stessa accelerazione perché la corda non scivola sulla puleggia. Applichiamo la legge di Newton all'insieme dei due blocchi, dove T_1e T_2 sono le tensioni della corda. Per il blocco 2 si ha

$$m_2 g - T_2 = m_2 a$$

per cui

$$T_2 = m_2\,(g-a) = 0,500\,kg \times \left(9,8 - 6,00 \cdot 10^{-2}\right)\frac{m}{s^2} = 4,87\,N$$

Applichiamo ora la stessa legge al corpo 1, avremo (essendo a l'accelerazione comune ai due blocchi che si muovono all'unisono)

$$m_1 g - T_1 = -m_1 a$$

$$T_1 = m_1\,(g+a) = 4,54\,N$$

Poiché la corda nella puleggia scorre senza scivolare, anche per la puleggia si avrà la stessa accelerazione tangenziale, per cui

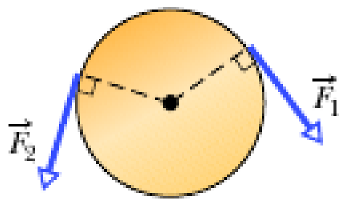
$$\alpha = \frac{a}{R} = \frac{6,00 \cdot 10^{-2}\,\frac{m}{s^2}}{5,00 \cdot 10^{-2}\,m} = 1,20\,\frac{rad}{s^2}$$

Ora, il momento che agisce sulla puleggia è $\tau = (T_2 - T_1)\,R$; per la legge di Newton per i corpi in rotazione abbiamo $\tau = I\alpha$, con I il momento d'inerzia, per cui

$$(T_2 - T_1)\,R = I\alpha$$

$$I = \frac{(T_2 - T_1)\,R}{\alpha} = \frac{(4,87\,N - 4,54\,N) \times 5,00 \cdot 10^{-2}\,m}{1,20\,\frac{rad}{s^2}} = 1,38 \cdot 10^{-2}\,kg \cdot m^2$$

Esercizio 22. La figura mostra un disco uniforme che può ruotare attorno al proprio centro come una giostra. Il disco ha un raggio di $2,00\,cm$ e una massa di $20,0\,g$ ed è inizialmente fermo. A partire dal tempo $t=0$, due forze sono applicate tangenzialmente al bordo come mostrato, in modo che al tempo $t=1,25\,s$ il disco acquista una velocità angolare di 250 rad/s in senso antiorario. Il modulo della forza F_1 è di $0,100\,N$. Trovare il modulo della forza F_2.



Soluzione. Il disco subisce un'accelerazione angolare che vale $\alpha=\frac{\omega}{t}$.

Applicando la seconda legge della dinamica abbiamo $\tau=I\alpha$. Ma, $\tau=\tau_1+\tau_2=I\alpha$. il momento d'inerzia è uguale a $\frac{1}{2}Mr^2$, possiamo scrivere

$$rF_2-rF_1=I\alpha$$

Risolvendo rispetto a F_2 si ha

$$F_2=\frac{I\alpha+rF_1}{r}=\frac{I\alpha}{r}+F_1=\frac{1}{2}\frac{M\cancel{r^2}}{\cancel{r}}\cdot\frac{\omega}{t}+F_1=\frac{0,02\,kg\times0,02\,m\times250\,\frac{rad}{s}}{2\cdot1,25}+0,1\,N=0,140\,N$$

Esercizio 23. Una puleggia, con momento d'inerzia di $1,0\cdot10^{-3}\,kg\cdot m^2$ attorno al suo asse e un raggio di $10\,cm$, è sottoposta all'azione di una forza applicata tangenzialmente al suo bordo. L'intensità della forza varia nel tempo come $F=0,50t+0,30t^2$, con F in newton e t in secondi. La puleggia è inizialmente ferma. A $t=3,00\,s$ quali sono l'accelerazione angolare e la velocità angolare?

Soluzione. L'esercizio richiede anche l'applicazione del calcolo integrale. Poiché la forza è tangenziale, l'accelerazione angolare, ricavabile dalla legge di Newton $\tau=I\alpha$, è espressa da

$$\alpha=\frac{\tau}{I}=\frac{Fr}{I}=\frac{(0,50t+0,30t^2)\times0,10}{1,0\cdot10^{-3}\,kg\cdot m^2}=100\left(0,50t+0,30t^2\right)=50t+30t^2\,\frac{rad}{s^2}$$

Se ora $t=3\,s$, sostituendo si ha

$$\alpha=150+270=4,20\cdot10^2\,\frac{rad}{s^2}$$

Per trovare la velocità angolare è

$$\omega=\int_0^3\alpha dt=\int_0^3\left(50t+30t^2\right)dt=25t^2+10t^3\Big|_0^3=225+270=4,95\cdot10^2\,\frac{rad}{s}$$

Esercizio 24. Un disco uniforme di massa M e raggio R è montato su un asse orizzontale fisso. Un blocco di massa m è sospeso ad una corda priva di massa avvolta attorno al bordo del disco. (a) Se $R = 12\,cm$, $M = 400\,g$ e $m = 50\,g$, trovare la velocità del blocco dopo che è sceso di $50\,cm$ partendo da fermo.

Soluzione. La massa m cade sotto l'azione della forza di gravità e mette in rotazione il disco di massa M. Ricordando la relazione relativa alla caduta dei gravi, la velocità sarà

$$v = \sqrt{2ah}$$

dove a è l'accelerazione del sistema blocco più disco, e h la distanza percorsa nella caduta, cioè $50\,cm$.

Ricordando che l'accelerazione comune al sistema in questo caso è data da avremo

$$a = \frac{2m}{2m+M}g$$

e sostituendo

$$v = \sqrt{\frac{4mgh}{2m+M}} = \sqrt{\frac{4 \times 50\,g \times 9,8\,\frac{m}{s^2} \times 0,50\,m}{500\,g}} = 1,4\,\frac{m}{s}$$

Esercizio 25. L'albero di un'automobile trasmette energia dal motore all'asse con una potenza di $74,6\,kW$ quando gira ad una velocità di 1800 giri/min. Quale coppia (in newton-metri) fornisce l'albero motore?

Soluzione. Calcoliamo la velocità in radianti al secondo

$$\omega = \frac{1800 \times 2\pi}{60} = 188,5\,\frac{rad}{s}$$

La potenza è data dal prodotto del momento della forza per la velocità angolare (equivalente al caso della dinamica non rotazionale $P = \frac{W}{t} = \frac{F\Delta s}{\Delta t} = Fv$)

$$P = \tau\omega$$

da cui

$$\tau = \frac{P}{\omega} = \frac{74,6 \cdot 10^3\,\frac{J}{s}}{188,5\,\frac{rad}{s}} = 396\,N \cdot m$$

Esercizio 26. Un'asta sottile lunga $0,75\,m$ e di massa $0,42\,kg$ è sospesa liberamente a un'estremità. Viene tirata da un lato e poi lasciata oscillare come un pendolo, passando attraverso la sua posizione più bassa con velocità angolare 4,0 rad/s. Trascurando l'attrito e la resistenza dell'aria, trovare (a) l'energia cinetica dell'asta nella sua posizione più bassa e (b) di quanto si alza il centro di massa al di sopra di tale posizione.

Soluzione. L'asta può essere considerata alla stregue di un pendolo. il punto più basso sarà l'estremo dell'asta quanto è posta in verticale. L'energia cinetica è data da

$$K = \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}mL^2\right)\omega^2 = \frac{1}{6} \times 0,42\,kg \times 0,75^2\,m^2 \times 4,0^2\,\frac{rad^2}{s^2} = 0,63\,J$$

Nella posizione da cui inizia l'oscillazione l'energia cinetica è $K = mgh$, dove h è la distanza cercata rispetto

$$h = \frac{K}{mg} = \frac{1}{6}\frac{\cancel{m}L^2\omega^2}{\cancel{m}g} = \frac{0,75^2\,m^2 \times 4,0^2\,\frac{rad^2}{s^2}}{6 \times 9,8\,\frac{m}{s^2}} = 0,15\,m$$

Esercizio 27. Una ruota di $32,0\,kg$, essenzialmente un cerchio sottile di raggio $1,20\,m$, ruota a 280 giri/min. Deve essere fermato in $15,0\,s$. (a) Quanto lavoro occorre fare per fermarlo? (b) Qual è la potenza media richiesta?

Soluzione. Calcoliamo la velocità angolare in rad/s, cioè

$$\omega = \frac{280 \times 2\pi}{60} = 29,3\,\frac{rad}{s}$$

calcoliamo il momento d'inerzia

$$I = MR^2 = 32\,kg \times 1,20^2\,m^2 = 46,1\,Kg \cdot m^2$$

Dal teorema dell'energia cinetica, il lavoro compiuto è uguale alla differenza tra l'energia cinetica finale e iniziale; poiché la ruota si deve fermare l'energia cinetica finale è nulla.

$$W = 0 - \frac{1}{2}I\omega^2 = -\frac{1}{2} \times 46,1\,Kg \cdot m^2 \times \left(29,3\,\frac{rad}{s}\right)^2 = -1,98 \cdot 10^4\,J$$

La potenza media è il rapporto tra il lavoro compiuto e l'intervallo di tempo trascorso

$$P = \frac{|W|}{\Delta t} = \frac{1,98 \cdot 10^4\,J}{15,0\,s} = 1,32 \cdot 10^3\,W$$

Esercizio 28. Un'asta sottile di un metro viene tenuta verticalmente con un'estremità appoggiata al pavimento e poi lasciata cadere. Trovare la velocità dell'altra estremità appena prima che tocchi il pavimento, supponendo che l'estremità sul pavimento non scivoli.

Soluzione. Indichiamo con l la lunghezza dell'asta. Il suo centro di massa si trova a metà dell'asta stessa (di cui si considera solo la lunghezza) cioè a $l/2$. Il centro di massa ha un'energia potenziale uguale a

$$U_{cdm} = \frac{1}{2}mgl$$

Nella condizione iniziale l'asta non si muove e la sua energia cinetica è pertanto nulla. Quando sta per raggiungere la terra la sua energia potenziale si annulla, trasformandosi in energia cinetica

$$K = \frac{1}{2}I\omega^2$$

dove I è il momento d'inerzia dell'asta rispetto a un asse passante per il punto finale. Ricordando il principio di conservazione dell'energia si avrà

$$\frac{1}{2}mgl = \frac{1}{2}I\omega^2$$

e ricavando ω

$$\omega = \sqrt{\frac{mgl}{I}}$$

la velocità sarà

$$v = \omega l = l\sqrt{\frac{mgl}{I}} = \sqrt{\frac{mgl^3}{I}}$$

poiché per l'asta considerata $I = \frac{1}{3}ml^2$, avremo, con $l = 1\,m$

$$v = \sqrt{\frac{mgl^3}{\frac{1}{3}ml^2}} = \sqrt{3gl} = \sqrt{3 \times 9,8\,\frac{m}{s^2} \times 1\,m} = 5,4\,\frac{m}{s}$$

Esercizio 29. Un camino alto e cilindrico cade quando la sua base si rompe. Trattare il camino come un'asta sottile lunga $55,0\,m$. Nell'istante in cui cade forma un angolo di$35,0°$ con la verticale, quali sono (a) l'accelerazione radiale della sommità.

Soluzione. Consideriamo il suo centro di massa. Supponendo il camino uniforme, si troverà a metà dell'altezza, cioè è $27,5\,m$ da terra. La sue energia potenziale è data da

$$U = mg\frac{h}{2} = 27,5mg\;J$$

l'energia cinetica iniziale è nulla. Quando il camino forma l'angolo di $35,0°$ con la verticale , si ha $h = \frac{h}{2}\cos\theta$; la sua energia cinetica diviene $K = \frac{1}{2}I\omega^2$. Applicando il principio di conservazione dell'energia si ha

$$mg\frac{h}{2} = mg\frac{h}{2}\cos\theta + \frac{1}{2}I\omega^2$$

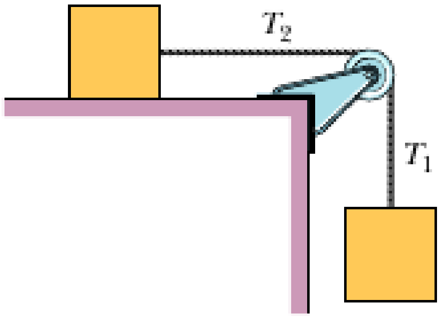
da cui si ricava, sapendo che $I = \frac{1}{3}mh^2$

$$\omega^2 = \frac{mgh}{I}(1 - \cos\theta)$$

, si ha

$$\omega = \sqrt{\frac{3\cancel{m}gh}{\cancel{m}h^2}(1 - \cos\theta)} = \sqrt{\frac{3 \times 9,8\,\frac{m}{s^2}}{55,0\,m}(1 - \cos 35°)} = 0,311\,\frac{rad}{s}$$

Esercizio 30. Nella figura, due blocchi uguali di $6,20\,kg$ sono collegati tramite una corda priva di massa a una puleggia di raggio $2,40\,cm$ e momento d'inerzia $7,40 \cdot 10^{-4}\,kg \cdot m^2$. La corda non scivola sulla carrucola; non è noto se vi sia attrito tra tavola e blocchi; l'asse della puleggia è privo di attrito. Quando questo sistema viene rilasciato da fermo, la puleggia gira di $0,130\,rad$ in $91,0\,ms$ e l'accelerazione dei blocchi è costante. Trovare il modulo dell'accelerazione angolare della puleggia, il modulo dell'accelerazione di entrambi i blocchi, la tensione della corda T_1 e la tensione della corda T_2.



Soluzione. L'accelerazione della puleggia è data da, tenendo conto delle condizioni iniziali,

$$\theta=\frac{1}{2}\alpha t^2$$

per cui

$$\alpha=\frac{2\theta}{t^2}=\frac{2\times 0,130\,rad}{\left(9,1\cdot 10^{-2}\right)^2}=31,4\,\frac{rad}{s^2}$$

Scegliamo le coordinate positive in modo che lo spostamento del blocco sul tavolo verso sia positivo e che lo spostamento verso il basso del dell'altro blocco sia ancora considerato come positivo. La massa è la stessa per entrambi e la corda, priva di massa, non scivola, potremo quindi scrivere che l'accelerazione dell'insieme sarà $a=R\alpha$.

Troviamo l'accelerazione a:

$$a=R\alpha=2,40\cdot 10^{-2}\,m\times 31,4\,\frac{rad}{s^2}=0,754\,\frac{m}{s^2}$$

Applicando la seconda legge di Newton rispettivamente ai due blocchi uguali e alla puleggia, si ottiene equazioni

$$\begin{gathered} mg-T_1=ma \\ T_2-f_{attrito}=ma \\ T_1R-T_2R=I\alpha \end{gathered}$$

Dalla prima equazione, abbiamo

$$T_1=m\left(g-a\right)=6,20\,kg\left(9,80-0,754\right)\,\frac{m}{s^2}=56,1\,N$$

Analogamente per T_2

$$T_2=\frac{T_1R-I\alpha}{R}=T_1-\frac{I\alpha}{R}=56,1\,N-\frac{7,40\cdot 10^{-4}\,kg\cdot m^2\times 31,4\,\frac{rad}{s^2}}{2,40\cdot 10^{-2}\,m}=55,1\,N$$

Esercizio 31. Un disco ruota con accelerazione angolare costante, dalla posizione angolare $\theta_1=10,0\,rad$ alla posizione angolare $\theta_2=70,0\,rad$ in $6,00\,s$. La sua velocità angolare a θ_2 è 15,0 rad/s. (a) Qual era la sua velocità angolare a θ_1? (b) Qual è l'accelerazione angolare? (c) In quale posizione angolare il disco era inizialmente fermo?

Soluzione. Utilizzando le formule relative alla cinematica rotazionale, in analogia con quelle dei moti rettilinei, abbiamo

$$\theta_2 - \theta_1 = \frac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2)\,t$$

e sostituendo i valori

$$60\,rad = \frac{1}{2}\left(\omega_1 + 15,0\,\frac{rad}{s}\right) \times 6,00\,s$$

da cui

$$\omega_1 = \frac{120 - 90,0}{6,00} = 5,00\,\frac{rad}{s}$$

applichiamo la definizione di accelerazione

$$\alpha = \frac{\omega_2 - \omega_1}{\Delta t} = \frac{15,0 - 5,00}{6,00} = 1,67\,\frac{rad}{s^2}$$

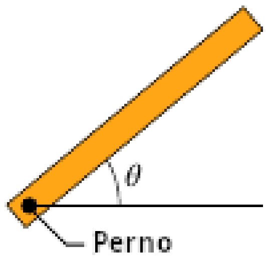
Dalla formula

$$\omega_1^2 = (\theta_1 - \theta_0)\,2\alpha$$

ricaviamo θ_0, cioè la posizione angolare iniziale quando $\omega_0 = 0$

$$\theta_0 = \theta_1 - \frac{\omega_1^2}{2\alpha} = 10,0 - \frac{25,0}{3,33} = 2,50\,rad$$

Esercizio 32. L'asta sottile e uniforme in figura ha una lunghezza di $2,0\,m$ e può ruotare attorno a un perno orizzontale privo di attrito posto a un'estremità. Viene rilasciata da ferma con un angolo $\theta = 40°$ sopra l'orizzontale. Utilizzare il principio di conservazione dell'energia per determinare la velocità angolare dell'asta mentre il perno passa attraverso la posizione orizzontale.



Soluzione. La lunghezza dell'asta è $L = 2,0\,m$. Il centro di massa dell'asta è posto inizialmente ad un'altezza $h = \frac{1}{2}L\sin 40°$. La sua energia potenziale prima del rilascio è $U = mgh$. Nella rotazione attorno al perno, l'energia potenziale si trasforma in energia cinetica rotazionale, $K = \frac{1}{2}I\omega^2$. Osservando le tavole che mostrano i valori dei momenti d'inerzia nei vari casi, si osserva che

$$I = \frac{1}{12}mL^2 + m\left(\frac{L}{2}\right)^2 = \frac{1}{3}mL^2$$

per cui

$$\cancel{m}g\frac{L}{2}\sin 40° = \frac{1}{6}\cancel{m}L^2\omega^2$$

da cui

$$\omega = \sqrt{\frac{3g\sin 40°}{L}} = 3,1\,\frac{rad}{s}$$

Esercizio 33. *Pulsar.* Quando una stella con una massa almeno dieci volte quella del Sole esplode verso l'esterno in una supernova, il suo nucleo può collassare in una pulsar, che è una stella rotante che emette radiazione elettromagnetica (onde radio o luce) in due fasci stretti in direzioni opposte. Se un raggio attraversa la Terra durante la rotazione, possiamo rilevare impulsi ripetuti della radiazione, uno per rivoluzione. (a) La prima pulsar fu scoperta da Jocelyn Bell Burnell e Antony Hewish nel 1967; i suoi impulsi sono separati da $1,3373\,s$. Qual è la sua velocità angolare in giri al secondo? (b) Ad oggi, la pulsar rotante più veloce ha una velocità angolare di 716 giri/s. Qual è la separazione degli impulsi rilevati in millisecondi?

Soluzione. La pulsar emette radiazione con un periodo di $1,3373\,s$. In questo tempo la stella compie un giro completo, per cui

$$\omega = \frac{1\,giro}{T} = \frac{1}{1,3373} = 0,7478\,\frac{giri}{s}$$

Se la pulsar che ruota più velocemente compie $716\,\frac{giri}{s}$, compirà un giro in

$$T = \frac{1}{716} = 1,40 \cdot 10^{-3}\,s = 1,40\,ms$$

Esercizio 34. *Stella rotante più veloce.* La stella VFTS102 nella Grande Nube di Magellano (una galassia satellite della nostra Via Lattea) ruota così velocemente da superare le aspettative tradizionali. La stella ha 25 volte la massa del Sole e se la consideriamo una sfera solida in rotazione, la superficie all'equatore si muove ad una velocità di $2,0 \cdot 10^6\,\mathrm{km/h}$. Per trovare il suo raggio, supponiamo che abbia la stessa densità del Sole. Quali sono (a) il raggio della stella, (b) il suo periodo di rotazione e (c) l'accelerazione centripeta di una sezione sulla superficie equatoriale?

Soluzione. Prendiamo la massa del Sole come $1,99 \cdot 10^{30}\,kg$, la massa della stella sarà allora $4,97 \cdot 10^{31}\,kg$. La densità media del sole è $1,408 \cdot 10^3\,\frac{kg}{m^3}$. Se la stella ha la stessa densità del sole, allora il suo volume è

$$V = \frac{m}{\rho} = \frac{4,97 \cdot 10^{31}\,kg}{1,408 \cdot 10^3\,\frac{kg}{m^3}} = 3,53 \cdot 10^{34}\,m^3$$

se la consideriamo come una sfera, il suo raggio sarà

$$r = \sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}} = \sqrt[3]{\frac{3 \times 3,53 \cdot 10^{34}\,m^3}{4\pi}} = 1,41 \cdot 10^{11}\,m$$

la circonferenza della stella all'equatore è

$$2\pi r = 2\pi \times 1,41 \cdot 10^{11}\,m = 8,87 \cdot 10^{11}\,m$$

il periodo di rotazione è

$$T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{8,87 \cdot 10^{11}\,m}{2,0 \cdot 10^9\,\frac{m}{s}} = 443,5\,s$$

l'accelerazione centripeta è data da

$$a_c = \frac{v^2}{r} = \frac{\left(2,0 \cdot 10^9\,\frac{m}{s}\right)^2}{1,41 \cdot 10^{11}\,m} = 1,42 \cdot 10^{-2}\,\frac{m}{s^2}$$

Esercizio 35. Un'automobile che viaggia a $80,0\,{}^{km}/_{h}$ ha pneumatici con diametro di $75,0\,cm$. (a) Qual è la velocità angolare dei pneumatici rispetto ai loro assi? (b) Se l'auto viene fermata uniformemente in 30, 0 giri completi delle ruote (senza sbandare), qual è il modulo dell'accelerazione angolare delle ruote? (c) Di quanto si sposta l'auto durante la frenata?

Soluzione. Consideriamo l'auto rappresentata dal suo centro di massa e trasformiamo l'unità di misura della sua velocità

$$\frac{80,0\,\frac{km}{h}\times 1000\,\frac{m}{km}}{3600\,\frac{h}{s}}=\frac{80,0}{3,6}=22,2\,\frac{m}{s}$$

la velocità angolare è data da

$$\omega=\frac{v_{cdm}}{r}=\frac{22,2\,\frac{m}{s}}{0,375\,m}=59,3\,\frac{rad}{s}$$

Calcoliamo il numero di radianti corrispondenti ai giri compiuti dalle ruote in frenata

$$\theta=30,0\times 2\pi=188\,rad$$

inoltre la velocità angolare finale è nulla (l'auto si arresta), per cui, dalle formule della cinematica,

$$\omega^2=\omega_0^2+2\alpha\theta$$

da cui

$$|\alpha|=\frac{\omega^2}{2\theta}=\frac{\left(59,3\,\frac{rad}{s}\right)^2}{2\times 188\,rad}=9,35\,\frac{rad}{s^2}$$

la distanza percorsa corrisponde alla circonferenza delle ruote per il numero di giri in frenata, cioè

$$r\theta=0,375\times 188=70,5\,m$$

Esercizio 36. Un cerchio di $140\,kg$ rotola su un pavimento orizzontale in modo che il suo baricentro abbia una velocità di $0,150\,{}^{m}/_{s}$. Quanto lavoro deve essere fatto sul cerchio per fermarlo?

Soluzione. Per il teorema dell'energia si ha che

$$W=K_f-K_i=-\Delta K$$

dove l'energia cinetica del corpo in rotolamento è data da $K=\frac{1}{2}I\omega^2+\frac{1}{2}mv^2$, cioè dalla componente che determina la rotazione del cerchio e dal suo contemporaneo spostamento in avanti per rotolamento. In questo caso $I=mr^2$, dove r è il raggio contato dal centro di massa, che ha una massa $m=140\,kg$ e una velocità orizzontale $v=0,150\,{}^{m}/_{s}$. Sappiamo che la velocità angolare è $\omega=\frac{v}{r}$. Pertanto

$$K=\frac{1}{2}m\cancel{r^2}\cdot\frac{v^2}{\cancel{r^2}}+\frac{1}{2}mv^2=mv^2=140\,kg\times\left(0,150\,\frac{m}{s}\right)^2=3,15\,J$$

per cui, dal teorema dell'energia cinetica ricordato si ha

$$W=K_f-K_i=0-3,15=-3,15\,J$$

Esercizio 37. Un'auto di $1000kg$ ha quattro ruote di $10\,kg$ ciascuna. Quando l'auto è in movimento, quale frazione della sua energia cinetica totale è dovuta alla rotazione delle ruote attorno ai propri assi? Supponiamo che le ruote siano dischi uniformi della stessa massa e dimensione. Perché non è necessario conoscere il raggio delle ruote?

Soluzione. Sia m la massa totale dell'auto e v la sua velocità. Sia I il momento d'inerzia di una ruota e ω la velocità angolare di ciascuna ruota. L'energia cinetica di rotazione delle quattro ruote è

$$K_{rotaz} = 4 \times \frac{1}{2} I\omega^2$$

L'energia cinetica totale è data da, (M massa totale dell'auto)

$$K = \frac{1}{2}Mv^2 + 2I\omega^2$$

la frazione richiesta è espressa dal rapporto tra l'energia dovuta alla rotazione delle ruote e quella totale, cioè

$$\frac{k_{rot}}{K} = \frac{2I\omega^2}{\frac{Mv^2+4I\omega^2}{2}} = \frac{4I\omega^2}{Mv^2 + 4I\omega^2}$$

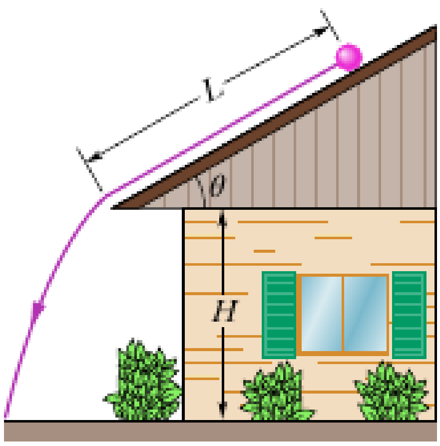
ora $I = \frac{1}{2}mr^2$ (m massa della ruota) e $\omega = \frac{v}{r}$ e sostituendo

$$\frac{k_{rot}}{K} = \frac{4 \times \frac{1}{2}mr^2 \times \frac{v^2}{r^2}}{Mv^2 + 4 \times \frac{1}{2}mr^2 \times \frac{v^2}{r^2}} = \frac{2mv^2}{Mv^2 + 2mv^2} = \frac{\cancel{v^2}\,(2m)}{\cancel{v^2}\,(M + 2m)} = \frac{20}{1000} = 0,020$$

Come si vede dal calcolo, nelle condizioni date, questo rapporto è indipendente dalla velocità del moto rettilineo e dal raggio delle ruote; le ruote infatti fanno parte integrante del sistema auto e il moto rettilineo è dovuto al rotolamento delle quattro ruote.

[se la massa dell'auto p considerata senza quella delle ruote, allora il rapporto è $\frac{20}{1020} = 0,0196$]

Esercizio 38. Nella figura, un cilindro di raggio $r = 10\,cm$ e massa $m = 12\,kg$ parte da fermo e rotola senza scivolare per una distanza $L = 6,0\,m$ lungo un tetto inclinato di un angolo $\theta = 30°$. Trovare la velocità angolare del cilindro attorno al suo centro mentre lascia il tetto; Il bordo del tetto dista $H = 5,0\,m$ da terra. Trovare la distanza in orizzontale dal bordo del tetto quando il cilindro tocca terra.



Soluzione. Abbiamo un caso di rotolamento lungo un piano inclinato e tratteremo il cilindro dal bordo del tetto secondo le leggi del moto parabolico.

La sua energia cinetica iniziale è $K_i = 0$ mentre la sua energia potenziale iniziale è $U_i = mgh$ dove $h = 6,0 \sin 30°$ è l'altezza del tetto considerando il bordo dello stesso come livello di riferimento per calcolare U). La sua energia cinetica finale (quando lascia il tetto) è

$$K_f = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2$$

dove v è la velocità del centro di massa del cilindro nel suo moto lungo il piano inclinato e ω la velocità angolare che caratterizza il rotolamento. Al bordo del tetto, l'energia potenziale si trasforma in energia cinetica per cui (ricordando che $v = \omega r$ e $I = \frac{1}{2}mr^2$

$$mgh = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2}mr^2\omega^2 + \frac{1}{4}mr^2\omega^2 = \frac{3}{4}mr^2\omega^2$$

dividendo tutto per m e risolvendo rispetto a ω

$$\omega = \sqrt{\frac{4gh}{3r^2}} = \sqrt{\frac{4 \times 9,8 \times 6,0 \sin 30°}{3 \times 0,1^2}} = 63\,\frac{rad}{s}$$

la velocità lineare che il cilindro possiede quando arriva al bordo del tetto è

$$v = \omega r = 63\,\frac{rad}{s} \times 0,1\,m = 6,3\,\frac{m}{s}$$

ricordiamo che il moto di caduta è un moto piano per cui la velocità iniziale ha una componente verticale e una orizzontale. Il moto complessivo è la composizione di un moto verticale uniformemente accelerato, per la gravità, e un moto rettilineo uniforme, poiché lungo la direzione orizzontale non agisce nessuna forza ulteriore. Avremo

$$v_{0x} = v_0 \cos 30° = 6,3 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 5,4\,\frac{m}{s}$$

$$v_{0y} = v_0 \sin 30° = 6,3 \times \frac{1}{2} = 3,1\,\frac{m}{s}$$

le due componenti del moto sono descritte dalle equazioni

$$x = v_{0x}t \quad y = v_{oy}t + \tfrac{1}{2}gt^2$$

troviamo il tempo t quando $y = H = 5,0\,m$ dalla equazione di 2° grado, riscritta in forma normale come $gt^2 + 2v_{oy}t - 2y = 0$, considerando la radice positiva

$$t = \frac{-v_{0y} \pm \sqrt{v_{oy}^2 + 2gh}}{g} = \frac{-3,1 \pm \sqrt{(-3,1)^2 + 2 \times 9,8 \times 5,0}}{9,8} = 0,74\,s$$

la distanza x sarà quindi ricavabile dalla prima equazione

$$x = v_{0x}t = 5,4\,\frac{m}{s} \times 0,74\,s = 4,0\,m$$

Esercizio 39. Una sfera cava di raggio $0,15\,m$, con momento d'inerzia $I = 0,040\,kg\,m^2$ attorno a una retta passante per il suo centro di massa, rotola senza scivolare su una superficie inclinata di 30° rispetto all'orizzontale. Ad una certa posizione iniziale, l'energia cinetica totale della sfera è $20\,J$. (a) Quanta parte di questa energia cinetica iniziale è di rotazione? (b) Qual è la velocità del centro di massa della sfera nella posizione iniziale? Quando la sfera si è spostata di $1,0\,m$ lungo il piano inclinato dalla sua posizione iniziale, quali sono (c) la sua energia cinetica totale e (d) la velocità del suo centro di massa?

Soluzione. Dalle tabelle che indicano i diversi valori del momento d'inerzia per corpi di diverse forme geometriche, otteniamo

$$I = \frac{2}{3}mr^2$$

e ciò ci consente di ricavare la massa della sfera

$$m = \frac{3I}{2r^2} = \frac{3 \times 0,040\,kg\,m^2}{2 \times 0,15^2\,m^2} = 2,7\,kg$$

possiamo ora riscrivere l'energia cinetica di rotazione come

$$K_{rot} = \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3}mr^2\omega^2 = \frac{1}{3}mr^2\omega^2$$

inoltre, la sfera rotola senza scivolare per cui la velocità del centro di massa è data $v_{cdm} = r\omega$ e l'energia cinetica del centro di massa diventa $K_{cdm} = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mr^2\omega^2$; scriviamo il rapporto tra l'energia rotazionale e quella totale

$$\frac{K_{rot}}{K_{cdm} + K_{rot}} = \frac{\frac{1}{3}mr^2\omega^2}{\frac{1}{2}mr^2\omega^2 + \frac{1}{3}mr^2\omega^2} = \frac{\frac{1}{3}mr^2\omega^2}{\frac{5}{6}mr^2\omega^2} = \frac{1}{3} \times \frac{6}{5} = 0,4$$

a) cioè l'energia cinetica rotazionale è il 40% di quella totale,

$$K_{rot} = 0,4 \times 20\,J = 8,0\,J$$

possiamo quindi ricavare la velocità angolare dalla relazione dell'energia rotazionale

$$\omega = \sqrt{\frac{3K_{rot}}{mr^2}} = \sqrt{\frac{24,0\,J}{2,7\,kg \times 0,15^2\,m^2}} = 20\,\frac{rad}{s}$$

e di conseguenza b)

$$v_{cm} = r\omega = 0,15\,m \times 20\,\frac{rad}{s} = 3,0\,\frac{m}{s}$$

c) la sfera rotola lungo un piano inclinato di 30° sull'orizzontale, per cui la distanza percorsa lungo il tratto inclinato corrisponde ad un'altezza di $h = 1,0 \sin 30° = 0,50\,m$. Applicando il principio di conservazione dell'energia meccanica abbiamo

$$K_i = K_f + U_f$$

e sostituendo $K_i = 20\,J$

$$20\,J = K_f + mgh$$

per cui

$$K_f = 20 - 2,7 \times 9,8 \times 0,50 = 6,8\,J$$

sappiamo che l'energia rotazionale è il 40% della totale, per cui, ripetendo la procedura

$$\frac{1}{3}mr^2\omega_f^2 = 0,40 \times K_f$$

da cui

$$\omega = \sqrt{\frac{3 \times 0,40 \times 6,8}{2,7 \times 0,15^2}} = 11,6\, \frac{rad}{s}$$

e d)

$$v_{cm} = r\omega = 0,15\, m \times 11,6\, \frac{rad}{s} = 1,7\, \frac{m}{s}$$

Esercizio 40. Ad un istante, la forza che agisce su $\overrightarrow{F} = 4,0 \overrightarrow{j}\, N$ agisce su un oggetto di massa $0,25\, kg$ che ha il vettore posizione $\overrightarrow{r} = \left(2,0 \overrightarrow{i} - 2,0 \overrightarrow{k}\right) m$ e vettore velocità $\overrightarrow{v} = \left(-5,0 \overrightarrow{i} + 5,0 \overrightarrow{k}\right)$ m/s. Riguardo all'origine e nella notazione vettoriale, trovare (a) il momento angolare dell'oggetto e (b) il momento della forza che agisce sull'oggetto.

Soluzione. Esercizio sul prodotto vettoriale di due grandezze vettoriali. La definizione generale di momento angolare è $\overrightarrow{L} = \overrightarrow{r} \times \overrightarrow{p} = m \left(\overrightarrow{r} \times \overrightarrow{v}\right)$, dove $\overrightarrow{p} = m\overrightarrow{v}$

$$\overrightarrow{r} \times \overrightarrow{v} = (yv_z - zv_y) \overrightarrow{i} + (zv_x - xv_z) \overrightarrow{j} + (xv_y - yv_x) \overrightarrow{k}$$

i vettori assegnati hanno solo le componenti x e z, cioè $y = 0$ e $v_y = 0$, per cui

$$\overrightarrow{r} \times \overrightarrow{v} = (zv_x - xv_z) \overrightarrow{j}$$

e sostituendo i valori dati, avremo

$$\overrightarrow{L} = m (zv_x - xv_z) \overrightarrow{j} = 0,25 \cdot [-2,0 \cdot (-5,0) - 2,0 \cdot 5,0] = 0$$

ripetendo lo stesso procedimento per il calcolo del momento della forza (o momento torcente) tenendo presente che per il vettore $\overrightarrow{r}$ non ha la componente lungo l'asse y e il vettore forza ha solo l componente lungo l'asse y.

$$\overrightarrow{r} \times \overrightarrow{F} = (yF_z - zF_y) \overrightarrow{i} + (zF_x - xF_z) \overrightarrow{j} + (xF_y - yF_x) \overrightarrow{k}$$

per cui

$$\overrightarrow{M} = \overrightarrow{r} \times \overrightarrow{F} = (-zF_y) \overrightarrow{i} + (xF_y) \overrightarrow{k} = (2,0 \cdot 4,0) + (2,0 \cdot 4,0) = \left(8,0 \overrightarrow{i} + 8,0 \overrightarrow{k}\right) Nm$$

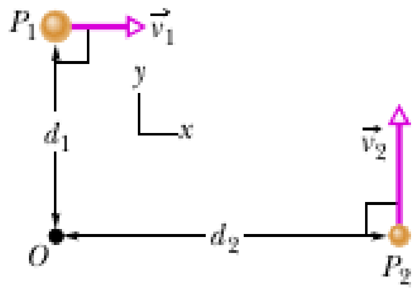
Osservazioni: se il momento angolare è nullo, vuol dire che i due vettori braccio e velocità sono paralleli. Se vogliamo ottenere il modulo del momento torcente, cioè

$$\left|\overrightarrow{r} \times \overrightarrow{F}\right| = rF \sin\alpha$$

possiamo ricavare l'angolo tra i due vettori

$$\alpha = \arcsin\left(\frac{M}{rf}\right) = \arcsin \frac{\sqrt{8,0^2 + 8,0^2}}{\sqrt{2^2 + 2^2} \cdot 4,0} = 90°$$

Esercizio 41. Nell'istante mostrato in figura , due particelle si muovono su un piano xy. La particella P_1 ha massa $m_1 = 6,5\, kg$ e velocità $v_1 = 2,2$ m/s, e si trova alla distanza $d_1 = 1,5\, m$ dal punto O. La particella P_2 ha massa $m_2 = 3,1\, kg$ e velocità $v_2 = 3,6$ m/s, e si trova alla distanza $d_2 = 2,8\, m$ dal punto O. Trovare (a) l'intensità e (b) la direzione del momento angolare netto delle due particelle attorno a O.



Soluzione. Calcoliamo il momento angolare relativo alla particella 1 (il vettore $\overrightarrow{d}_1$ è perpendicolare al vettore velocità, per cui

$$L_1 = r_1 m_1 v_1 = 1,5\,m \times 6,5\,kg \times 2,2\,\frac{m}{s} = 21,5\,\frac{kg\,m^2}{s}$$

Usando la regola della mano destra per i prodotti vettoriali, troviamo che il vettore è perpendicolare al piano della figura (asse z) e con verso uscente.

Analogamente per la seconda particella

$$L_1 = r_2 m_2 v_2 = 2,8\,m \times 3,1\,kg \times 3,6\,\frac{m}{s} = 31,2\,\frac{kg\,m^2}{s}$$

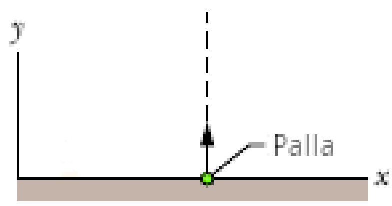
in questo caso il vettore è entrante nel piano della figura.

Calcoliamo il momento angolare totale, tenendo conto che i due vettori hanno verso opposto

$$L = L_2 - L_1 = 31,2 - 21,5 = 9,8\,\frac{kg\,m^2}{s}$$

la direzione è lungo l'asse z.

Esercizio 42. Nella figura, una palla di massa $m = 0,400\,kg$ viene lanciata direttamente verso l'alto alla velocità iniziale di $v_0 = 40,0\,{}^{m}/_{s}$. Qual è il suo momento angolare attorno a P, posto a $2,00\,m$ orizzontalmente dal punto di lancio, quando la palla è (a) alla massima altezza e (b) a metà strada dal suolo?



Soluzione. a) La palla alla sua massima altezza ha velocità nulla (poi ricade, infatti) e quindi il momento angolare è nullo.

b) Assegnando al verso orario il segno negativo, si ha

$$L = -rmv$$

Nel punto di massima altezza l'energia cinetica iniziale si trasforma in potenziale,

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = mgh$$

per cui

$$h = \frac{v_0^2}{2g} = \frac{\left(40,0\,\frac{m}{s}\right)^2}{2 \times 9,8\,\frac{m}{s^2}} = 82,0\,m$$

a metà strada l'altezza sarà $\frac{h}{2} = 41,0\,m$ e la velocità si ricava ancora da

$$\frac{1}{2}mv^2 = mg\frac{h}{2} = mg\frac{v_0^2}{g}$$

da cui

$$v = \frac{v_0}{\sqrt{2}} = 28,2\,\frac{m}{s}$$

il momento angolare sarà allora

$$L = -mrv = 0,400\,kg \times (-2,00\,m) \times 28,2\,\frac{m}{s} = -22,6\,kg\frac{m^2}{s}$$

Esercizio 43. Al tempo $t = 0$, una particella di massa $m = 3,0\,kg$ con velocità $v = 5,0\,\overrightarrow{i} - 6,0\,\overrightarrow{j}$ è a $x = 3,0\,m$, $y = 8,0\,m$. È attratta da una forza di $7,0\,N$ nel verso negativo delle x. Per quanto riguarda l'origine, quali sono (a) il momento angolare della particella, (b) il momento torcente che agisce sulla particella.

Soluzione. La definizione generale di momento angolare è $\overrightarrow{L} = \overrightarrow{r} \times \overrightarrow{p} = m\left(\overrightarrow{r} \times \overrightarrow{v}\right)$, dove $\overrightarrow{p} = m\overrightarrow{v}$; il prodotto vettoriale è dato da

$$\overrightarrow{r} \times \overrightarrow{v} = (yv_z - zv_y)\,\overrightarrow{i} + (zv_x - xv_z)\,\overrightarrow{j} + (xv_y - yv_x)\,\overrightarrow{k}$$

lo stesso dicasi per il momento torcente, per cui

$$\overrightarrow{\tau} = \overrightarrow{r} \times \overrightarrow{F} = (yF_z - zF_y)\,\overrightarrow{i} + (zF_x - xF_z)\,\overrightarrow{j} + (xF_y - yF_x)\,\overrightarrow{k}$$

a) sostituendo i valori assegnati per il calcolo del momento angolare ($z = 0$, $v_z = 0$), si ha

$$\overrightarrow{L} = 3,0\,kg\left[3,0\,m \times \left(-6,0\,\frac{m}{s}\right) - 8,0\,m \times 5,0\,\frac{m}{s}\right] = -174\,\overrightarrow{k}\,kg\frac{m^2}{s}$$

b) per il momento torcente, la forza ha solo la componente $-x$, per cui

$$\overrightarrow{\tau} = -yF_x\,\overrightarrow{k} = -8,0\,m \times (-7,0\,N)\,\overrightarrow{k} = 56\,\overrightarrow{k}\,N$$

Esercizio 44. Il momento angolare di un volano avente un momento d'inerzia di $0,140\,kg \cdot m^2$ attorno al suo asse centrale diminuisce da $3,00$ a $0,800\,kg \cdot \frac{m^2}{s}$ in $1,50s$. (a) Trovare il momento torcente medio che agisce sul volano attorno al suo asse centrale durante questo periodo; (b) assumendo un'accelerazione angolare costante, di quale angolo gira il volano? (c) Quanto lavoro viene svolto su di esso? (d) Qual è la potenza media del volano?

Soluzione. a) Il momento torcente medio è data da

$$\overline{\tau} = \frac{L_f - L_i}{\Delta t} = \frac{0,800 - 3,00}{1,50} = -1,47\,Nm$$

dove il segno negativo indica che il vero del momento è opposto a quello del momento angolare iniziale, presa come positiva.

b) troviamo l'angolo di cui è ruotato in questo intervallo di tempo, con accelerazione uniforme, dalle formule della cinematica rotazionale

$$\theta = \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2$$

ma $\alpha = \frac{\tau}{I}$, dalla legge di Newton e inoltre $\omega_0 = \frac{L_i}{I}$, per cui

$$\theta = \frac{L_i}{I}t + \frac{1}{2}\frac{\tau}{I}t^2 = \frac{2L_i t + \tau t^2}{2I} = \frac{2 \times 3,00 \times 1,50 + (-1,47) \times 1,50^2}{2 \times 0,140} = 20,3\,rad$$

c) il lavoro è dato da (momento della forza per spostamento angolare)

$$W = \tau\omega = -1,47 \times 20,3 = -29,9\,J$$

d) la potenza media è il rapporto tra il lavoro svolto e il tempo impiegato a compierlo

$$P = -\frac{W}{\Delta t} = \frac{29,9}{1,50} = 19,9\,W$$

Esercizio 45. Un uomo si trova su una piattaforma che ruota (senza attrito) con una velocità angolare di $1,2$ giri/s; le sue braccia sono tese e tiene un mattone in ciascuna mano. Il momento d'inerzia del sistema costituito dall'uomo, dai mattoni e dalla piattaforma attorno all'asse verticale centrale della piattaforma è di $6,0\,kg \cdot m^2$. Se spostando i mattoni l'uomo diminuisce il momento d'inerzia del sistema a $2,0\,kg \cdot m^2$, quali sono (a) la velocità angolare risultante della piattaforma e (b) il rapporto tra la nuova energia cinetica del sistema e quella iniziale? (c) Quale sorgente ha fornito l'energia cinetica aggiunta?

Soluzione. Nella descrizione, sul sistema non agisce alcun momento esterno, pertanto il momento angolare totale del sistema si conserva. Se I_i il momento d'inerzia iniziale del sistema e I_f quello finale, allora

$$I_1\omega_i = i_f\omega_f$$

e sostituendo

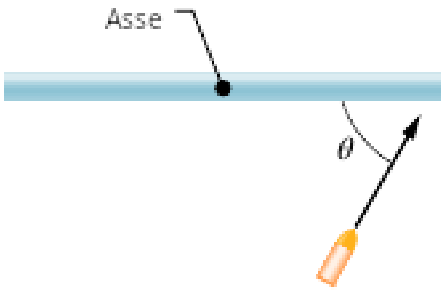
$$\omega_f = \frac{I_i}{I_f}\omega_i = \frac{6,0\,kg \cdot m^2}{2,0\,kg \cdot m^2} \times 1,2\,\frac{giri}{s} = 3,6\,\frac{giri}{s}$$

b) L'energia cinetica iniziale è $K_i = \frac{1}{2}I_i\omega_i^2$ e quella finale $K_f = \frac{1}{2}I_f\omega_f^2$ e il loro rapporto è

$$\frac{K_f}{k_i} = \frac{\cancel{\frac{1}{2}}I_f\omega_f^2}{\cancel{\frac{1}{2}}I_i\omega_i^2} = \frac{2,0\,kg \cdot m^2 \times \left(3,6\,\frac{giri}{s}\right)^2}{6,0\,kg \cdot m^2 \times \left(1,2\,\frac{giri}{s}\right)^2} = 3,0$$

c) L'energia aggiuntiva è fornita dal lavoro fatto dall'uomo per diminuire il momento d'inerzia avvicinando i mattoni al suo corpo.

Esercizio 46. Nella figura (vista dall'alto), un'asta sottile uniforme di lunghezza $l = 0,500\,m$ e massa $M = 4,00\,kg$ può ruotare su un piano orizzontale attorno ad un asse verticale passante per il suo centro. L'asta è ferma quando un proiettile di massa $m = 3,00\,g$ che viaggia nel piano di rotazione viene sparato verso un'estremità dell'asta. Nella vista dall'alto, il percorso del proiettile forma con l'asta un angolo $\theta = 60,0^\circ$. Se il proiettile si conficca nell'asta e la velocità angolare dell'asta è $\omega = 10\,{}^{rad}/_{s}$ immediatamente dopo l'urto, qual è la velocità del proiettile appena prima dell'impatto?



Soluzione. L'asse di rotazione è nel punto medio dell'asta distante $r = 0,25\,m$ da entrambe le estremità. Il momento angolare iniziale del sistema (che è proprio quello del proiettile, prima dell'impatto) è

$$L = rmv\sin\theta$$

dove $m = 0,003\,kg$ e $\theta = 60,0^\circ$ e il suo verso è antiorario, che assumeremo come positivo. Dopo l'urto, il momento di inerzia del sistema è

$$I = I_{asta} + mr^2$$

dove il momento d'inerzia dell'asta è $\frac{1}{12}Ml^2$, dove $M = 4,00\,kg$ e $l = 0,500\,m$. La conservazione del momento angolare del sistema asta proiettile, si traduce in

$$rmv\sin\theta = \left(\frac{1}{12}Ml^2 + mr^2\right)\omega$$

ricaviamo quindi v, velocità del proiettile prima dell'impatto

$$v = \frac{\left(\frac{1}{12}MI^2 + mr^2\right)\omega}{rm\sin\theta} = \frac{\left(\frac{1}{12}\times 4,00\times 0,500^2 + 0,003\times 0,25^2\right)\times 10}{0,25\times 0,003\times\sin 60^\circ} = 1,3\cdot 10^3\,\frac{m}{s}$$

Esercizio 47. Un disco uniforme di massa $10m$ e raggio $3,0r$ può ruotare liberamente attorno al suo centro fisso come una giostra. Un disco uniforme più piccolo di massa m e raggio r si trova sopra il disco più grande, concentrico ad esso. Inizialmente i due dischi ruotano insieme con una velocità angolare di 20 rad/s. Poi un piccola perturbazione fa scivolare il disco più piccolo verso l'esterno attraverso il disco più grande, finché il bordo esterno del disco più piccolo non si aggancia al bordo esterno del disco più grande. Successivamente i due dischi ruotano nuovamente insieme (senza ulteriore scorrimento). (a) Qual è allora la loro velocità angolare attorno al centro del disco più grande? (b) Qual è il rapporto ${}^{K}/_{K_0}$ tra la nuova energia cinetica del sistema a due dischi e l'energia cinetica iniziale del sistema?

Soluzione. Le loro velocità angolari, quando sono attaccati tra loro, sono uguali, indipendentemente dal fatto che condividano lo stesso asse centrale. Il momento d'inerzia iniziale del sistema è

$$I_0 = I_{grande} + I_{piccolo}$$

dove i due momenti d'inerzia si calcolano allo stesso modo essendo concentrici (variano ovviamente massa e raggio)

$$I_0 = \frac{1}{2}MR^2 + \frac{1}{2}mr^2$$

Il disco piccolo, dopo il suo scivolamento, ha un momento d'inerzia dato da $\frac{1}{2}mr^2 + m\left(R-r\right)^2$. Pertanto, la nuova inerzia rotazionale del sistema è

$$I = \frac{1}{2}MR^2 + \frac{1}{2}mr^2 + m\left(R-r\right)^2$$

a) Troviamo la velocità angolare attraverso la legge di conservazione del momento angolare $I_0\omega_0 = I\omega$;

$$\omega = \omega_0 \frac{I_0}{I} = \omega_0 \frac{\frac{1}{2}MR^2 + \frac{1}{2}mr^2}{\frac{1}{2}MR^2 + \frac{1}{2}mr^2 + m\left(R-r\right)^2}$$

sostituendo i valori assegnati, si ha

$$\omega = 20 \times \frac{5m \times 9,0r^2 + 0,5mr^2}{5m \times 9,0r^2 + 0,5mr^2 + m \times 4,0r^2} = 20 \times \frac{91}{99} = 18\frac{rad}{s}$$

b) Il rapporto tra le due energie cinetiche, espresse dalla relazione generale $K = \frac{1}{2}I\omega^2$ sarà

$$\frac{K}{K_0} = \frac{I}{I_0} \cdot \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 = \frac{99}{91} \times \left(\frac{18}{20}\right)^2 = 0,88$$